Différentielle du déterminant

Lemme 1. *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration.

Montrons que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

$$GL_n(\mathbb{K}) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \det M \neq 0 \right\} = \overset{-1}{\det}(\mathbb{R}*)$$

Comme det est continue, $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (complexes).
Soit $(\varepsilon_k)_k$ une suite de complexes qui converge vers 0.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $|\varepsilon_k| < \min(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$.
Alors, pour tout $k \geqslant N$, on a :

$$\det(M + \varepsilon_k I_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \varepsilon_k) \neq 0$$

Les matrices $X_k = M + \varepsilon_k I_n$ sont inversibles et convergent vers M, d'où la densité. □

Théorème 2. *La fonction* $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ et de différentielle* $d_X \det(H) = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H)$.

Démonstration.

La fonction det est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$.
On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme.

Soit H une matrice, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. On a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) = 1 + t \operatorname{tr} H + \mathcal{O}(t^2)$$

Alors on a $d_{I_n} \det(H) = \operatorname{tr} H$.

Soient $X \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} \det(X + H) &= \det(X) \det(I_n + X^{-1} H) \\ &= \det(X) \left(1 + \operatorname{tr}(X^{-1} H) + o(\, \|H\| \,) \right) \\ &= \det(X) + \operatorname{tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H) + o(\, \|H\| \,) \end{aligned}$$

Donc $d_X \det(H) = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H)$.

Les fonctions $X \mapsto d_X \det$ et $X \mapsto (H \mapsto \operatorname{tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H)$ coïncident sur $GL_n(\mathbb{K})$ qui est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$. On en conclut que pour tout $X, H \in M_n(\mathbb{R})$, on a $d_X \det(H) = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H)$. □

Application 3. *Pour* $A \in M_n(\mathbb{R})$*,* $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$

Démonstration.

Soient $y_1, \dots, y_n$ les solutions du système différentiel $y'(t) = A(t)y(t)$, où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue et soit $w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$ leur wronskien.

Soit Y la matrice colonne de $(y_1, \dots, y_n)$, ainsi $Y' = AY$.

$$\begin{aligned} w'(t) &= d_{Y(t)} \det(Y'(t)) \\ &= \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(Y(t))Y'(t)) \\ &= \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(Y(t))A(t)Y(t)) \\ &= \operatorname{tr}(A(t)Y(t)\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(Y(t))) \\ &= \operatorname{tr}(A(t)\det(Y(t))) \\ &= \operatorname{tr}(A(t))w(t) \end{aligned}$$

On obtient donc $w'(t) = \operatorname{tr}(A(t))w(t)$ et, par conséquent :

$$w(t) = w(0) \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr}(A(s))ds\right)$$

Si de plus, A est constant, alors, revenant au système initial, on a :

$$Y'(t) = AY(t) \Rightarrow Y(t) = Y(0)e^{tA}$$

On applique le déterminant à cette égalité et on obtient :

$$w(t) = w(0)\det(e^{tA})$$

Utilisons maintenant le résultat dans le cas où A n'est pas constant, on obtient alors :

$$w(t) = w(0)e^{t \operatorname{tr}(A)}$$

Ainsi, on obtient le résultat. □

Références

[Rou] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini